

РЫСҚАН АЙНҰР РЫСҚАНҚЫЗЫ

МНОГОМЕРНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

диссертационной работы на соискание степени
доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 – «Математика»

Актуальность темы исследования. Гипергеометрические функции занимают особую нишу в классе специальных функций. Часто решения различных задач математики, физики, механики, экономики выражаются посредством определенных интегралов, содержащих специальные функции. Но не всегда эти интегралы представляется возможным решить с помощью известных алгоритмов, так как подынтегральные функции зачастую зависят от одного или нескольких параметров. Это приводит к вычислению огромного количества сложных интегралов. В подобных случаях возможностей современной вычислительной техники и численных методов недостаточно. Тогда становится целесообразным представить интеграл через сходящийся бесконечный ряд или произведение.

Изучение свойств гипергеометрических функций имеет большое значение, так как гипергеометрические функции широко применяются в исследовании разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящем диссертационном исследовании рассматривается четырехмерное вырождающееся дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, для него строятся фундаментальные решения, строятся решения краевых задач, которые выражены четырехмерными гипергеометрическими функциями. Используя преобразования и операторный метод, гипергеометрические ряды четырех аргументов представляются как произведение нескольких гипергеометрических рядов, зависящих от меньшего количества переменных и параметров. Для решения краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений в конечной области требуется построение функции Грина, которое представляется фундаментальным решением. Таким образом, исследование свойств гипергеометрических функций четырех переменных и применение их в исследовании разрешимости краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений, обуславливают **актуальность** настоящей темы диссертации.

Проведенный обзор и анализ степени изученности вопросов, рассматриваемых в предлагаемой диссертации, показал, что в течение последнего столетия развитие теории гипергеометрических функций очень

прогрессировало. Гипергеометрические функции применяются в решении дифференциальных уравнений огромного спектра задач, например, они используются в математической физике, задачах теплопроводности и некоторых разделах небесной механики, построении потенциалов, элементах математической статистики, изучении электромагнитных колебаний, и аэродинамики, теориях связи и суперструн, также встречаются в прикладных задачах квантовой химии и газовой динамики, приложениях квантовой теории поля и астрономии. Изучены свойства гипергеометрических функций нескольких переменных, для целого ряда функций получены формулы интегрального представления, формулы разложения, смежных соотношений и аналитического продолжения.

Целью диссертационной работы является построение фундаментальных решений уравнения Геллерстедта от четырех переменных и исследование корректной разрешимости краевых задач.

Объектом исследования выступают гипергеометрические функции от четырех переменных и вырождающееся уравнение эллиптического типа Геллерстедта.

Предметом исследования является применимость гипергеометрических функций от четырех переменных в построении решений краевых задач для вырождающегося уравнения эллиптического типа (H) .

Задачи диссертационного исследования:

- получение линейно независимых решений дифференциальных систем уравнений для ряда гипергеометрических функций четырех переменных;
- получение формул разложения гипергеометрических функций четырех переменных;
- построение фундаментальных решений вырождающегося эллиптического уравнения в R_+^4 ;
- постановка и исследование вопросов разрешимости краевых задач для уравнения с вырождениями (H) в неограниченной области;
- постановка и исследование задач для уравнения (H) со смешанными условиями Дирихле и Неймана в неограниченной области;
- решение краевой задачи N для вырождающегося уравнения (H) в ограниченной области.

Положения, выносимые на защиту:

1) Построены линейно независимые решения дифференциальных систем уравнений для некоторых гипергеометрических функций четырех переменных.

2) Доказаны операторные тождества и формулы разложения для некоторых гипергеометрических рядов Гаусса от четырех аргументов с помощью пар взаимобратных операторов Берчнелла-Ченди $\nabla_{x,y}(c)$ и $\Delta_{x,y}(c)$, Хасанова-Сриваставы $\tilde{\nabla}_{x,y,z,t}(c)$ и $\tilde{\Delta}_{x,y,z,t}(c)$, Чой-Хасанова $H(a,b)$ и $\bar{H}(a,b)$.

3) Построено шестнадцать фундаментальных решений четырехмерного вырождающегося эллиптического уравнения в явном виде.

4) Разработан метод построения краевых задач для четырехмерного обобщенного уравнения Геллерстедта в бесконечной области. Доказаны теоремы единственности и существования решения краевых задач.

5) Доказана теорема единственности решения задачи N в конечной области. Построена функция Грина задачи N . Получено явное решение задачи N .

Методы исследования. В ходе реализации цели и задач диссертационного исследования будут применены качественные свойства гипергеометрических рядов многих переменных, классические методы дифференциальных уравнений с частными производными, методы интегрального исчисления, операционные методы, метод интегралов энергии и принцип экстремума, метод функции Грина, метод преобразования Меллина-Бернса, операторные методы Берчнелла-Ченди и Чой-Хасанова.

Научная новизна исследования.

1. Для ряда четырехмерных гипергеометрических функций решены системы дифференциальных гипергеометрических уравнений, найдены линейно независимые решения соответствующих систем в явном виде.

2. Получены формулы разложения для некоторых гипергеометрических функций от четырех переменных с помощью различных операторов.

3. Впервые построены фундаментальные решения вырождающегося эллиптического уравнения Геллерстедта четырех аргументов, с помощью которых решен ряд краевых задач в неограниченной области. В ограниченной области сформулирована задача N , доказана единственность решения для задачи N , построена функция Грина задачи и доказано существование решения данной задачи в явном виде.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации подтверждается публикацией основных результатов в изданиях, входящих в международные наукометрические базы; также это подтверждается применением известных классических методов, применяемых в теории дифференциальных уравнений с частными производными; последовательным обоснованием и доказательством каждого полученного результата; для работы с гипергеометрическими функциями нескольких переменных использованы апробированные алгоритмы и методы, верифицированные и опубликованные в фундаментальных трудах теории гипергеометрических функций.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Тема диссертационного исследования имеет теоретическую направленность. Результаты, связанные с изучением свойств гипергеометрических функций, пополняют базу знаний теории специальных функций. Остальные полученные результаты могут быть применены в теории краевых задач для уравнений эллиптического типа с вырождениями.

Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами. Предлагаемая диссертация выполнена в рамках:

- 1) проекта программы грантового финансирования фундаментальных и прикладных научных исследований МОН РК на 2018-2020гг. «Математическое моделирование динамики упруго-деформируемых пористых сред с учетом частотной зависимости коэффициента трения (с памятью)» №AP05131026;
- 2) грантового финансирования Казахского национального педагогического университета имени Абая на 2020г. «Разработка методов построения решения краевых задач для четырехмерных вырождающихся уравнений эллиптического типа» Договор №3 от 05.01.2020г.

Апробация работы. В течение проведения исследований по теме диссертации, полученные промежуточные результаты были обсуждены и доложены на семинарах и конференциях. Были опубликованы тезисы и статьи в сборниках материалов 14 научных конференций, из которых 11 имели международный статус: Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (2018, Стерлитамак, РБ); Четырнадцатая международная Азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем» (2018, оз. Иссык-Куль, КР); The VI International scientific conference «Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2018» (2018, Tashkent, RU); III Международная научно-практическая конференция «Информатика и прикладная математика» (2018, Алматы, РК); VIII Международная научно-методическая конференция «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке» (2018, Алматы, РК); V Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (2018, Нальчик, КБР); Международная конференция Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения – XXX «Современные методы теории краевых задач» (2019, Воронеж, РФ); Научный семинар «Проблемы прикладной математики и информатики» (2019, Актобе, РК); International scientific conference «Inverse problems in finance, economics and life sciences» (2019, Алматы, РК); IV Международная научно-практическая конференция «Информатика и прикладная математика» (2019, Алматы, РК); Узбекско-Российская научная конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (2019, Ташкент, РУ); Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики» (2020, Фергана, РУ); Международная конференция Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения – XXXI. «Современные методы теории краевых задач» (2020, Воронеж, РФ); Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» (2020, Ташкент, РУ).

Публикации. Результаты по теме диссертации были оформлены в 21 публикацию, из которых 3 статьи были опубликованы в рейтинговых международных журналах, относящихся к международным наукометрическим базам, 3 – в журналах, рекомендуемых КОКСОН МОН РК, 1 – в журнале, входящем в базу РИНЦ, 14 тезисов и статей, опубликованных в собраниях результатов международных конференций.

Публикации в рейтинговых научных журналах:

1. Hasanov A., Berdyshev A.S., Ryskan A. Fundamental solutions for a class of four-dimensional degenerate elliptic equation // *Complex Var. Elliptic Equ.* –2020. –Vol. 65, No. 4, –P. 632–647.

2. Berdyshev A.S., Ryskan A. The Neumann and Dirichlet problems for one four-dimensional degenerate elliptic equation // *Lobachevskii J. Math.* –2020. – Vol. 41, No. 6, –P. 1051–1066.

3. Berdyshev A.S., Hasanov A., Ryskan A.R. Solution of the Neumann problem for one four-dimensional elliptic equation. // *Eurasian Math. J.* –2020. – Vol.11, No. 2. –P. 93–97.

Публикации в журналах, рекомендуемых КОКСОН МОН РК

1. Рыскан А.Р. Формулы разложения с операторами H Гипергеометрических рядов Гаусса от четырех переменных второго порядка // *Вестник КазНПУ им.Абая. Сер. Физ.-мат. науки.* – 2020. №3(71). –С. 79-84.

2. Berdyshev A.S., Hasanov A., Ryskan A.R. Decomposition formulas for some quadruple hypergeometric series // *Bullet. Karaganda Univ. Math. ser.* – 2020. No. 4 (100), –P. 43–54.

3. Рыскан А.Р. Решение задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка // *Вестник КазНПУ им.Абая. Сер. Физ.-мат. науки.* –2019. № 4 (68). –С. 92–98.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 107 страницах, состоит из введения, четырех глав с разделами, заключения и списка использованных источников.

Основное содержание диссертации. Во введении приведена краткая хронология этапов развития теорий вырождающихся эллиптических уравнений и гипергеометрических функций, описано современное состояние объекта и предмета настоящего исследования. Изложены актуальность и новизна темы диссертации на текущий момент, поставлена цель и сформулированы задачи работы, указаны методы исследования, обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, теоретическая и практическая значимость, апробация и публикация основных результатов.

Первый раздел состоит из четырех подразделов. В первом подразделе приводятся известные определения, свойства, формулы и предварительные сведения о гипергеометрических функциях. Во втором подразделе приводятся первые результаты диссертационного исследования: даны определения систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для ряда четырехмерных гипергеометрических функций и находятся их линейно независимые решения. В третьем и четвертом

подразделах приведены операторные тождества и формулы разложения гипергеометрических функций четырех переменных с применением разных операторов, справедливость операторных тождеств доказывается с помощью преобразования Меллина и интегралов Меллина-Бернса, справедливость формул разложения доказывается с помощью операторных тождеств.

Второй раздел посвящен построению фундаментальных решений дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя гиперплоскостями вырождения. Получено шестнадцать фундаментальных решений, которые выражаются гипергеометрическими функциями Лауричеллы. Также доказана теорема о сингулярности фундаментальных решений, где применяются формулы дифференцирования, автотрансформации и формула разложения, представляющая гипергеометрическую функцию нескольких переменных как произведение функций Гаусса одной переменной.

В третьем разделе в бесконечной области сформулированы краевые задачи для эллиптического уравнения с несколькими вырождениями, приведены доказательства теорем существования и единственности решения поставленных задач, в явной форме выписаны их решения. Теорема единственности решения задач с краевыми условиями Дирихле доказывается посредством принципа экстремума. Чтобы доказать единственность решения краевой задачи N^∞ применяется метод интегралов энергии.

Четвертый раздел посвящен решению краевой задачи N для вырождающегося уравнения (H) в ограниченной области. Приведено доказательство теоремы единственности краевой задачи N . Построена функция Грина задачи N . Доказана теорема существования решения задачи N , решение записано в явном виде.

В заключении приведены полученные в ходе диссертационного исследования основные результаты и сделаны выводы по ним.